# 10. DLA的成長におけるクラスター伝導度の影響

早川美徳
東北大学．情報処理教育センター

Diffusion-Limited Aggregation (DLA) モデルはラプラス場中での成長過程を非常に単純化してものであるが、同時にまたビスコスフィンガーや電析、結晶成長などにおいて見られるパターン形成をよく記述することが明らかになっている。DLA で仮定されている系の理想化として、たとえば外部境界がクラスターに比べて十分遠方に設定されていることや系の準定常性、クラスター表面での等ポテンシャルな境界条件などが挙げられる。ところが一般的な実験において、等ポテンシャルな境界条件が十分満足されているかどうかは疑問が残る。例えば、ビスコスフィンガーの実験においてこの条件が満足されるためには、注入される側の流体の粘性が注入される側のものに比べて十分大きくフィンガー内で実質的に圧力の低下が無視できることが必要であるが、現実的にこの粘性比は100~1000程度である。また、融液での結晶成長においても環境相の熱伝導度は結晶内の伝導度を無視できるほど大きいとは言えない。

このようにDLA 的成長において環境相の伝導度 $\sigma_1$と成長パターンの伝導度$\sigma_2$の比 $M=\sigma_2/\sigma_1$ は実験系との対応を考察する上で重要なパラメータであるが、パターン形成の $M$ 依存性は明らかでない。我々は King [J. Phys. A20, L529(1987)] が行なったビスコスフィンガーのモデルと同等な、ボンドの伝導度を考慮した 2 次元での計算機実験を行なった。2 次元格子を考え、それぞれのボンドにある伝導度 $\sigma 1$ を割り当てる。矩形領域の底辺でのポテンシャルをある一定値 $\phi(bottom)=0$ に、他方の辺を $\phi(top)=1$ に設定する。こうして以下の連立方程式から各ノードでのノードでのポテンシャル分布を計算する。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sum_{x' \in n.n.} \sigma(x{:}x')} \sum_{x' \in n.n.} \sigma(x{:}x')\, \phi(x') \tag{1}$$

ここで、$\sigma(x{:}x')$ はノード $x, x'$ 間のボンドの伝導度、$n.n.$ は最近接ノードを表す。初期条件では全てのノードは等しい伝導度 $\sigma 1$ を持つが、各ボンド中の流れの量に比例した確率で一つを取り出し、それを伝導度 $\sigma 2$ のボンドで置き換える：

$$\mathbf{Prob}(\sigma_1 \Rightarrow \sigma_2) \sim |f(x) - f(x')| \tag{2}$$

一箇所のボンドを置き換えた後、再び緩和法により(1)式を解き、(2)の規則によってボンドの置き換えを1回行なう。こうした手続きを多数回行なうことによって、σ2 のボンドで構成された「クラスター」が得られる（図1参照）。

$M \to \infty$ の極限でこのモデルは DLA あるいは L. Niemeyer et al.(Phys. Rev. Lett. 52) の誘電破壊モデルに、$M$=1 では付着の方向が制限された Eden モデルに等価であると考えられる。

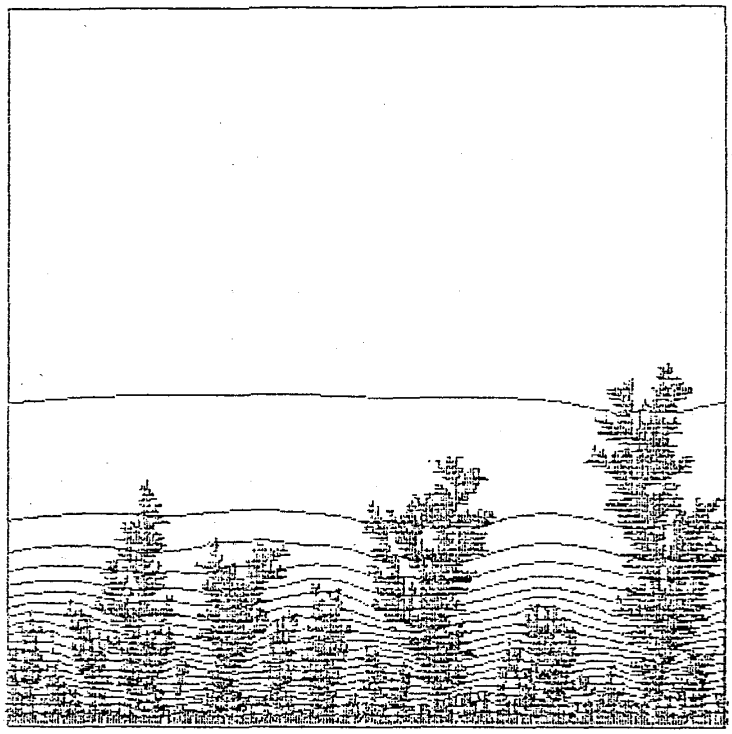

図1　代表的なクラスター（$M$=5）と等ポテンシャル線。10,000本のボンドからなる。$M$ が有限であっても依然スクリーニングが長距離的に作用し、開いた DLA 的な構造を形成している。

クラスターの表面を滑らかであると仮定し、平らな表面（線）に与えた摂動に対する線形安定性を調べると、波長 $k$ で振幅 δ の摂動の成長率は

$$\frac{\dot{\delta}}{\delta} = \frac{M-1}{M+1} k U \tag{3}$$

となる。ここで $U$ は表面の平均進行速度である。従って、このモデルでは $M<1$ であるような場合には界面は絶対安定と考えられるが、$M>1$ ではその漸近的振る舞いは自明ではない。特に、$M=1$ の場合には界面の運動はポテンシャルの勾配方向への無相関な粒子の付着に他ならず、成長界面の高さの分散 $\Delta h$ はクラスターの平均の高さ $\bar{h}$ に対して

$$(\Delta h)^2 \sim \bar{h}$$

のようにスケールするであろう。計算機実験によれば $M>1$ の場合この関係は $\Delta h \sim \bar{h}$ であり、界面の凹凸はクラスターの高さに比例して成長する。得られたパターンの密度相関関数およびボックスカウンティング法から、ボンドの伝導度の比がクラスターと環境相の間で有限であると、枝の太さは $M$ が 1 に近づくにつれ太くなる傾向があるものの、長距離的な相関は依然フラクタル的で、フラクタル次元は DLA と誤差の範囲内で区別しがたい（図 2 参照）。

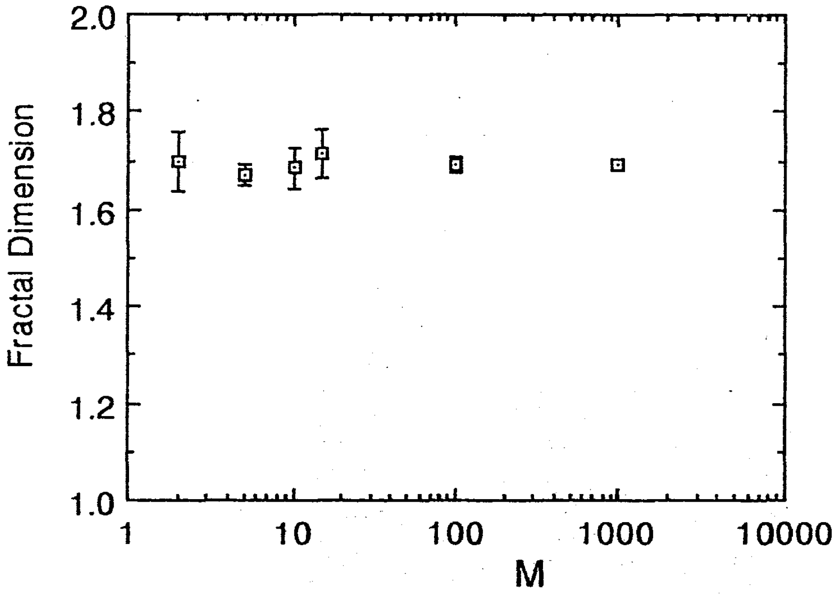


図 2　ボックスカウンティングによって求めたクラスターのフラクタル次元のパラメーター $M$ 依存性 二次元 DLA で知られている値 $D$=1.71 にいずれの $M$ でも非常に近い

計算機実験によって得られた結果をまとめると以下のようである。

1. $M$>1 であればパターンは DLA 的に成長し、$M$ に応じて枝の特長的な太さは変化するものの、長波長でのコンパクトなパターンへのクロスオーバーは生じない。この意味で DLA パターンはこのパラメータ領域で安定に存在する。これは King らの計算機実験の結果（King はクラスター周囲のフラクタル次元は、パラメーター $M$ に強く依存すると結論している）や最近の実空間操り込み理論[T.Nagatani, J. Phys. A 21; A. Coniglio et al., preprint]とは一致しない。

2. 線形安定性から予想されるように $M$<1 であれば得られるパターンはコンパクトでその表面も滑らかとなるべきである。ところが、ボンドモデルの場合はクラスター内部の構造（連結性）によりクラスター内部の流れに非一様性が生じ、これがパターン表面の大域的な構造に反映してこのパラメータ領域においても荒れた表面を形成する。